JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 3, 445–454 (1970)

Zur Kompaktheit bei Exponentialsummen

ECKARD SCHMIDT

Department of Mathematics, Statistics and Computing Science, The University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada

Communicated by L. Collatz

Received May 29, 1969

Beschränkte Mengen von Exponentialsummen erweisen sich als kompakt in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz im Innern eines Intervalls. Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird für die Klasse der Exponentialsummen ein neuer Existenzbeweis für die Lösung des Tschebyscheffschen Approximationsproblems angegeben. Unter einer Voraussetzung über die Gradreduktion erhält man die gleichmäßige Konvergenz auf dem gesamten Intervall.

Closed sets of exponential sums, which are uniformly bounded over a closed interval $[a, b]$ of the real axis, are proved to be compact in the topology of uniform convergence on every compact subinterval of the open interval (a, b). This result is used to give a new proof for the existence of solution of the Tschebyscheff approximation problem for exponentials. Under a presupposition on the degree of the limit function, one obtains uniform convergence over the whole interval.

1. Unter einer Exponentialsumme wird eine Funktion verstanden, die eine Darstellung

$$h(x) = \sum_{i=1}^{1} p_i(x)\, e^{t_i x} \tag{1.1}$$

erlaubt, wobei die t_i reell und paarweise verschieden sind und die $p_i(x)$ Polynome in x mit reellen Koeffizienten darstellen. Der Ausdruck

$$k(h) := \sum_{i=1}^{1} (\partial p_i + 1) \tag{1.2}$$

wird Grad von h genannt. Hierbei werde mit ∂p der Polynomgrad von p bezeichnet; dem Nullpolynom sei der Polynomgrad -1 zugeordnet. Die Menge der Exponentialsummen, deren Grade die natürliche Zahl n nicht übertreffen, wird mit E_n bezeichnet. Daneben werden die folgenden Untermengen betrachtet.

$$E_n^0 := \left\{ h \in E_n \, , h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{t_i x} \right\} \tag{1.3}$$

$$E_n^+ := \left\{ h \in E_n \, , h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{t_i x}, \, a_i \geqslant 0 \right\}. \tag{1.4}$$

Den Mengen E_n , E_n^0, und E_n^+ wandte man sich in letzter Zeit im Rahmen von approximationstheoretischen Untersuchungen zu [1, 3–5].

In der vorliegenden Arbeit soll eine grundlegende topologische Eigenschaft der Exponentialsummen aufgezeigt werden.

Es sei $[a, b]$ ein endliches abgeschlossenes Intervall der reellen Achse und $C[a, b]$ der Raum der auf $[a, b]$ stetigen reellwertigen Funktionen, versehen mit der Tschebyscheff-Norm

$$\| \varphi \| := \sup_{x \in [a,b]} | \varphi(x)|. \tag{1.5}$$

In der Topologie, die durch diese Norm induziert wird, d.h. in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $[a, b]$, ist die Menge E_n abgeschlossen ([5] und Lemma 3), aber die beschränkten Teilmengen von E_n

$$E_{n,K} := \{ h \in E_n \, \| h \| \leqslant K < \infty \} \tag{1.6}$$

sind in dieser Topologie nicht kompakt. Das zeigt das folgende Beispiel 1. Die Folge $\{h_m\}$ mit

$$h_m(x) := e^{-m(x-1)} \qquad m = 1, 2,... \tag{1.7}$$

ist auf $[0, 1]$ beschränkt, es ist $\| h_m \| = 1$ für alle m. Aber wegen

$$\lim h_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 1 \\ 0 & \text{für} \quad 0 \leqslant x < 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

enthält sie keine auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Man kann jedoch die Kompaktheit der Mengen $E_{n,K}$ erhalten, wenn man eine schwächere Topologie zugrundelegt, z.B. die Topologie der fast überall punktweisen Konvergenz [5]. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß das Gewünschte bereits von einer noch recht starken Topologie geleistet wird, die sich aus dem folgenden Konvergenzbegriff herleitet.

Definition 1. Eine Folge von Funktionen aus $C[a, b]$ konvergiert im Innern von (a, b) gleichmäßig gegen $f \in C[a, b]$, wenn sie auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) gleichmäßig gegen f konvergiert. Als Abschwächung gegenüber der Folgenkompaktheit werde gesetzt:

Definition 2. Eine Menge $M \subset C[a, b]$ heißt quasifolgenkompakt, wenn jede Folge von Elementen aus M eine Teilfolge enthält, die gleichmäßig im Innern von (a, b) gegen ein Element von M konvergiert.

Es wird bewiesen, daß die Mengen $E_{n,K}$ sowie die Mengen

$$E_{n,K}^{+} := \{h \in E_n^{+}, \| h \| \leqslant K < \infty\} \tag{1.9}$$

quasifolgenkompakt sind (Satz 2 und Korollar 2). Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird für die Mengen E_n und E_n^{+} ein Existenzbeweis für die Lösung des Tschebyscheffschen Approximationsproblems angegeben (Satz 3, Korollar 3).

Unter einer Voraussetzung über die Gradreduktion kann man bei einer Folge von Exponentialsummen von der gleichmäßigen Konvergenz im Innern eines Intervalls auf die gleichmäßige Konvergenz auch auf dem abgeschlossenen Interval schließen (Satz 4). Als eine weitere Anwendung dieser Überlegungen wird gezeigt, daß die Menge $E_n^0 - E_{n-1}$ offen in E_n ist (Satz 5).

2. Bei bestimmten Funktionen, zu denen auch die Exponentialsummen zählen, ist die gleichmäßige Konvergenz im Innern eines Intervalls eng mit der Existenz einer geeigneten Schranke für die Nullstellenanzahlen der Ableitungen verknüpft. Als Hilfsmittel dienen zwei Abschätzungen.

Lemma 1 (vgl. [5], Hilfssatz 2.3). *Es sei $f \in C^{n+1}[a, b]$. Für $i = 0,\ldots, n+1$ sei im Fall $f^{(i)} \not\equiv 0$ mit $Z_i(f)$ die Menge der in $[a, b]$ gelegenen Nullstellen von $f^{(i)}$ bezeichnet, sonst sei $Z_i(f)$ die leere Menge. Ferner sei R der Rand des Intervalls und*

$$Z(f) = \bigcup_{i=0}^{n+1} Z_i(f) \cup R \tag{2.1}$$

Dann gilt mit $d > 0$ für jedes $x \in [a, b]$ mit

$$\inf_{z \in Z(f)} | x - z | \geqslant i \cdot d \tag{2.2}$$

die Abschätzung

$$| f^{(i)}(x)| \leqslant \frac{\|f\|}{d^i} \qquad \text{für} \quad i = 0, 1,\ldots, n. \tag{2.3}$$

Lemma 2. *Es sei f eine Funktion aus $C^{n+1}[a, b]$. Ihre* $(n+1)$te *Ableitung* *möge höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzen oder identisch verschwinden. Dann gilt mit*

$$K := \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \max\{|f^{(i)}(a)|, |f^{(i)}(b)|\} \tag{2.4}$$

für jeden Punkt $x \in [a, b]$ die Abschätzung

$$|f'(x)| \leqslant K \sum_{j=0}^{n} (b - a)^j. \tag{2.5}$$

Beweis. Unter der Annahme des Gegenteils gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, sodaß mit $d := b - a$ gilt

$$|f'(x_0)| > K_1 := K \sum_{j=0}^{n} d^j. \tag{2.6}$$

Definiert man rekursiv $K_i = (K_{i-1} - K)/d$, $i = 2,..., n$, so ist für $i = 1,..., n$

$$K_i = K \sum_{j=0}^{n-i+1} d^j \geqslant K. \tag{2.7}$$

Durch Induktion wird nun für $2 \leqslant i \leqslant n + 1$ die folgende Aussage bewiesen:

Im Intervall (a, b) besitzt $f^{(i)}$ $i - 1$ Nullstellen $x_1^i < x_2^i < \cdots < x_{i-1}^i$, und für die Punkte x_1^i und x_{i-1}^i gilt:

$$|f^{(i-1)}(x_r^i)| > K_{i-1} \qquad r = 1, i - 1.$$

Da $|f'(x)|$ nach Voraussetzung in den Punkten a und b durch K beschränkt ist, aber nach Annahme $|f'(x_0)| > K_1 \geqslant K$ gilt, gibt es mindestens einen Punkt $x_1^2 \in (a, b)$ mit $|f'(x_1^2)| > K_1$ und $f''(x_1^2) = 0$. Die zu beweisende Aussage gilt also für $i = 2$. Sie gelte nun für ein $i \leqslant n$. Nach dem Satz von Rolle hat dann $f^{(i+1)}$ in (x_1^i, x_{i-1}^i) mindestens $(i - 1) - 1 = i - 2$ Nullstellen. Nach dem Mittelwertsatz gilt für eine gewisse Zwischenstelle $x \in (a, x_1^i)$

$$|f^{(i)}(x)| = \frac{|f^{(i-1)}(x_1^i) - f^{(i-1)}(a)|}{|x_1^i - a|} \geqslant \frac{|f^{(i-1)}(x_1^i)| - |f^{(i-1)}(a)|}{|x_1^i - a|}. \tag{2.8}$$

Nach Induktionsannahme ist $|f^{(i-1)}(x_1^i)| \geqslant K_{i-1}$, und nach Voraussetzung gilt $|f^{(i-1)}(a)| \leqslant K$. Daraus folgt wegen $|x_1^i - a| < d$ weiter

$$|f^{(i)}(x)| > \frac{K_{i-1} - K}{d} = K_i \geqslant K. \tag{2.9}$$

Ferner ist $f^{(i)}(x_1^i) = 0$ und $|f^{(i)}(a)| \leqslant K$.

Hieraus folgt mit (2.9), daß es mindestens einen Punkt $x_1^{i+1} \in (a, x_1^{\,i})$ mit $|f^{(i)}(x_1^{i+1})| > K_i$ und $f^{(i+1)}(x_1^{i+1}) = 0$ gibt. Das gleiche Argument für das andere Ende des Intervalls vervollständigt den Induktionsbeweis.

Die soeben bewiesene Aussage besagt speziell für $i = n + 1$, daß die Funktion $f^{(n+1)}$ mindestens n Nullstellen besitzt. Da sie wegen $f^{(n)}(x_1^{n+1}) > K_n \geqslant K \geqslant 0$ und $f^{(n)}(x_1^{\,n}) = 0$ nicht identisch verschwindet, liegt ein Widerspruch zur Voraussetzung vor.

Satz 1. *Es sei $M \subset C^{n+1}[a, b]$ eine Menge, für deren Elemente gelten möge:*

(1) $\| h \| \leqslant K < \infty$ *für alle* $h \in M$.

(2) *Für jedes $h \in M$ besitzt die $(n + 1)$-te Ableitung höchstens $n - 1$ Nullstellen oder verschwindet identisch.*

Dann gibt es eine Folge von Elementen aus M, die gleichmäßig im Innern von (a, b) konvergiert.

Beweis. Unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion existiert für jedes Element h von M eine Schranke für die Summe der Nullstellenanzahlen von $h^{(i)}$, $i = 0,..., n + 1$, wenn man hierbei $h^{(i)} \equiv 0$ unberücksichtigt läßt, nämlich

$$s := \sum_{i=0}^{n+1} (2n - i) = \frac{n + 2}{2} (3n - 1). \tag{2.10}$$

Es sei nun ein Intervall $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ vorgegeben. Setzt man

$$d_0 := \min\{| a - a_1 |, | b - b_1 |\},$$

dann gibt es zu jedem Element $h \in M$ zwei Teilintervalle $I_{1,h}$ und $I_{2,h}$ von $[a, a_1]$ bzw. $[b_1, b]$, welche je die Länge $d_1 = d_0/(s + 1)$ haben und—sofern $h^{(i)}$ nicht identisch verschwindet—keine Nullstelle von $h^{(i)}$, $i = 0,..., n + 1$, enthalten. Die Intervallmitten von $I_{1,h}$ bzw. $I_{2,h}$ seien mit $a_h{}^*$ bzw. $b_h{}^*$ bezeichnet. Nach Lemma 1 gelten dann für $i = 0,..., n$ die Abschätzungen

$$| h^{(i)}(a_h{}^*)| \leqslant \frac{\| h \|}{\left(\frac{d_1}{2i}\right)^i}, \qquad | h^{(i)}(b_h{}^*)| \leqslant \frac{\| h \|}{\left(\frac{d_1}{2i}\right)^i}. \tag{2.11}$$

Setzt man

$$K^* := \min_{0 \leqslant i \leqslant n} \left\{\left(\frac{d_1}{2i}\right)^i\right\} \tag{2.12}$$

und wendet man Lemma 2 auf $[a_h^*, b_h^*]$ und h an, so gilt für alle $x \in [a_h^*, b_h^*]$, also insbesondere für alle $x \in [a_1, b_1]$, die Ungleichung

$$| h'(x)| \leqslant \frac{K}{K^*} \sum_{j=0}^{n} (b_h^* - a_h^*)^j \leqslant \frac{K}{K^*} \sum_{j=0}^{n} (b - a)^j, \tag{2.13}$$

d.h. auf dem Intervall $[a_1, b_1]$ sind die 1. Ableitungen aller Funktionen aus M gleichmäßig beschränkt. Nach dem Satz von Ascoli enthält M daher eine auf $[a_1, b_1]$ gleichmäßig konvergente Teilfolge. Da das Teilintervall $[a_1, b_1]$ beliebig vorgegeben war, gilt das erhaltene Resultat auch für jedes Glied der Ausschöpfungsfolge $\{[a_\mu, b_\mu]\}$, mit

$$a_\mu := a + \frac{b-a}{\mu+1}, \qquad b_\mu := b - \frac{b-a}{\mu+1}, \qquad \mu = 2, 3, \ldots . \tag{2.14}$$

Mit dem Diagonalverfahren kann man eine Teilfolge auswählen, welche auf jedem Intervall $[a_\mu, b_\mu]$, $\mu \in \mathbf{N}$, also auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von (a, b) gleichmäßig konvergiert.

Jede nicht identisch verschwindende Exponentialsumme vom Grade n besitzt höchstens $n - 1$ Nullstellen (vgl. etwa [3, 1]), und mit $h \in E_n$ liegen auch sämtliche Ableitungen von h in E_n. Somit gilt das

KOROLLAR 1. *Jede Menge*

$$E_{n,K} = \{h \in E_n, \| h \|_{[a,b]} \leqslant K < \infty\} \tag{2.15}$$

enthält eine Teilfolge, die gleichmäßig im Innern von (a, b) *konvergiert.*

Zum Nachweis, daß die Menge E_n unter gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen ist (vgl. [5]), untersucht man zweckmäßigerweise das Konvergenzverhalten der zugehörigen charakteristischen Polynome. Bekannlich löst die Exponentialsumme h vom Grad k eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\chi(D)h = \sum_{j=0}^{k} A_j D^j h = 0, \tag{2.16}$$

und die Exponenten t_i sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi(x)$. Im weiteren sei das einer Exponentialsumme vom Grad k zugeordnete charakteristische Polynom dasjenige mit dem Polynomgrad k und dem zu 1 normierten höchsten Koeffizienten. Es sei angenommen, daß die Nullstellen t_i der Betragsgröße nach geordnet sind. Über die Abgeschlossenheit hinaus läßt sich eine Aussage über die Gradreduktion angeben.

LEMMA 3. *Die Folge* $\{h_m\} \subset E_n$ *möge auf* $[a, b]$ *gleichmäßig gegen* h *kon-*

vergieren, und es seien χ_m die zugehörigen charakteristischen Polynome. Es sei d die Anzahl der Nullstellenfolgen

$$\{t_{m,i}\}_{m\in\mathbf{N}} \qquad \textit{mit} \qquad |\, t_{m,i}\,| \to \infty. \tag{2.17}$$

Dann stimmt die Grenzfunktion h auf $[a, b]$ mit einem Element von E_{n-d} überein.[1]

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß alle χ_m den gleichen Polynomgrad $k \leqslant n$ besitzen. Weiter darf man für i mit $k - d + 1 \leqslant i \leqslant k$ wegen $|\, t_{m,i}\,| \to \infty$ voraussetzen: $t_{m,i} \neq 0$. Durch Auswahl einer Teilfolge kann man erreichen, daß für $1 \leqslant i \leqslant k - d$ die Nullstellenfolgen $\{t_{m,i}\}$ konvergieren; die Grenzwerte seien mit t_i bezeichnet. Da jedes h_m auch der Differentialgleichung

$$\psi_m(D)\, h_m = \Big[\prod_{i=1}^{k-d} (D - t_{m,i}) \prod_{i=k-d+1}^{k} \Big(\frac{D}{t_{m,i}} - 1\Big)\Big]\, h_m = 0 \tag{2.18}$$

genügt und alle Ableitungen im Innern von (a, b) gleichmäßig konvergieren, gilt dort

$$\lim \psi_m(D)\, h_m = \prod_{i=1}^{k-d} (D - t_i)h = 0. \tag{2.19}$$

Also ist h in (a, b), und wegen der Stetigkeit auch in $[a, b]$, identisch mit einer Exponentialsumme vom Grad $k - d$, also einem Element von E_{n-d}.

Als Zusammenfassung der Resultate von Korollar 1 und Lemma 3 besteht somit der

SATZ 2. *Die beschränkten Teilmengen von E_n*

$$E_{n,K} = \{h \in E_n\,,\, \|\, h\,\| \leqslant K < \infty\} \tag{2.20}$$

sind quasifolgenkompakt.

Die entsprechende Aussage gilt nicht für E_n^0, hingegen für E_n^+.

KOROLLAR 2. *Die Mengen $E_{n,K}^+$ sind quasifolgenkompakt.*

Beweis. Wegen der Nichtnegativität der Koeffizienten kann man von der gleichmäßigen Beschränktheit der Summen

$$\sum_{i=1}^{n} a_{m,i} e^{t_{m,i} x} \tag{2.21}$$

auf die gleichmäßige Beschränktheit der Summanden $a_{m,i}e^{t_{m,i}x}$ schließen.

[1] E_0 möge die Menge bezeichnen, die nur aus der Funktion $f(x) \equiv 0$ besteht.

Für eine gewisse Indexmenge $I \subset \mathbf{N}$ konvergiert nach Korollar 1 jede der Summandenfolgen

$$\{a_{m,i}e^{t_{m,i}x}\}_{m\in I}, \qquad i = 1,\dots, n, \tag{2.22}$$

gleichmäßig im Innern von (a, b), und zwar im Fall $|t_{m,i}| \to \infty$ nach Lemma 3 gegen die identisch verschwindende Funktion, sonst gegen eine Funktion $a_ie^{t_ix}$ mit $a_i \geqslant 0$. Die Menge $E_n{}^+$ ist also unter gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossen. Mit Satz 2 folgt daraus die Behauptung.

3. Mit Hilfe von Satz 2 läßt sich zeigen, daß die Tschebyscheffsche Approximationsaufgabe bezüglich der Menge E_n stets eine Lösung besitzt, d.h. daß zu jeder gegebenen Funktion $f \in C[a, b]$ ein Element $h^* \in E_n$ existiert mit

$$\| f - h^* \| = \inf_{h\in E_n} \| f - h \|. \tag{3.1}$$

Hierzu vergleiche man [4] und [5].

SATZ 3. *Zu jeder Funktion $f \in C[a, b]$ existiert eine Lösung des Tschebyscheffschen Approximationsproblems bezüglich E_n.*

Beweis. Es sei $\{h_m\} \subset E_n$ eine Minimalfolge, d.h. es gelte

$$\lim \| f - h_m \| = \inf_{h\in E_n} \| f - h \|. \tag{3.2}$$

Mit einem beliebigen $\delta > 0$ ist dann $\| h_m \| \leqslant 2 \| f \| + \delta$ für genügend großes m. Nach Satz 2 existiert daher eine Teilfolge, die gleichmäßig im Innern von (a, b), also punktweise für jedes $x \in (a, b)$ gegen ein Element h^* von E_n konvergiert. Für alle $x \in (a, b)$ folgt aus

$$| f(x) - h_m(x) | \leqslant \| f - h_m \| \tag{3.3}$$

durch Grenzübergang $m \to \infty$

$$| f(x) - h^*(x) | \leqslant \lim \| f - h_m \| = \inf_{h\in E_n} \| f - h \|. \tag{3.4}$$

Daher ist auch

$$\sup_{x\in(a\ b)} | f(x) - h^*(x) | \leqslant \inf_{h\in E_n} \| f - h \|. \tag{3.5}$$

Hierbei ist wegen der Stetigkeit von f und h^* die linke Seite gleich $\| f - h^* \|$, woraus die Behauptung folgt. Wegen Korollar 2 kann man den gleichen Schluß auch auf die Menge $E_n{}^+$ anwenden, und es gilt (vgl. [1])

KOROLLAR 3. *Zu jeder Funktion $f \in C[a, b]$ existiert eine Lösung des Tschebyscheffschen Approximationsproblems bezüglich E_n^+.*

Unter einer Voraussetzung über die Gradreduktion kann man bei einer Folge von Exponentialsummen von der gleichmäßigen Konvergenz im Innern eines Intervalls auf die gleichmäßigen Konvergenz auch auf dem abgeschlossenen Intervall schließen.

SATZ 4. *Die Folge $\{h_m\} \subset E_n$ möge gleichmäßig im Innern von (a, b) gegen h konvergieren, und es gelte für die Grade: $k(h_m) \leqslant k(h)$. Dann konvergiert die Folge $\{h_m\}$ auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen h.*

Beweis. Da wegen $k(h_m) \leqslant k(h)$ keine Gradreduktion vorliegt, gibt es nach Lemma 3 eine von m unabhängige Schranke für die Beträge der Nullstellen der zu h_m gehörenden charakteristischen Polynome. Nach [2] ist dann die Folge der 1. Ableitungen von h_m gleichmäßig auf $[a, b]$ beschränkt. Mit der gleichmäßigen Konvergenz von $\{h_m\}$ im Innern von (a, b) folgt daraus die Behauptung.

Es ist klar, daß die Menge $E_n - E_{n-1}$ offen in E_n ist, denn E_{n-1} ist abgeschlossen. Darüberhinaus kann man zeigen, daß auch $E_n{}^0 - E_{n-1}^0$ offen in E_n ist. Hierbei wird die bekannte Tatsache benutzt, daß eine Exponentialsumme aus E_n genau dann in $E_n{}^0$ liegt, wenn die Nullstellen des ihr zugeordneten charakteristischen Polynoms paarweise verschieden sind.

SATZ 5. *Die Menge $E_n{}^0 - E_{n-1}^0$ ist offen in E_n.*

Beweis. Unter der Annahme, daß die Behauptung falsch ist, gibt es ein $h \in E_n{}^0 - E_{n-1}^0$ und eine gleichmäßig gegen h konvergente Folge von Exponentialsummen $h_m \in E_n$ mit $h_m \notin E_n{}^0$ oder $k(h_m) \leqslant n - 1$. Letzteres kann ausgeschlossen werden, da $E_n - E_{n-1}$ offen in E_n ist. Nach dem Beweis von Lemma 3 konvergieren dann die zu h_m gehörenden charakteristischen Polynome χ_m gegen dasjenige von h, und dieses besitzt wegen $h \in E_n{}^0$ keine mehrfachen Nullstellen. Daher sind für genügend großes m auch die Nullstellen von χ_m getrennt, d.h. es ist $h_m \in E_n{}^0$. Mit dem erhaltenen Widerspruch ist die Behauptung bewiesen.

Diese Arbeit ist Teil meiner am Rechenzentrum der Universität Münster angefertigten Dissertation. Herrn Prof. Dr. H. Werner danke ich für die Förderung der Arbeit und Herrn Dr. D. Braess für zahlreiche Diskussionen.

Literatur

1. D. Braess, Approximation mit Exponentialsummen, *Computing* **2** (1967), 309–321.
2. L. H. Haynes, Derivatives of solutions of linear differential equations, *Notices Amer. Math. Soc.* **14** (1967), 249.
3. G. Meinardus, "Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung," Springer Verlag, Berlin/New York, 1964.
4. J. Rice, Chebyshev approximation by exponentials, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **10** (1962), 149–162.
5. H. Werner, Der Existenzsatz für das Tschebyscheffsche Approximationsproblem mit Exponentialsummen (erscheint in den Tagungsberichten über Approximationstheorie, Oberwolfach, Nov. 1967, Birkhäuser Verlag, Basel/Stuttgart).